

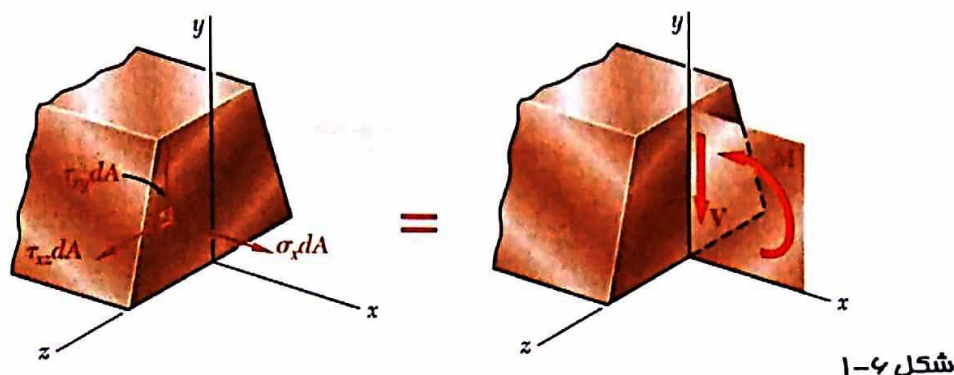
# تنشهای برشی در تیرها و عضوهای جدار نازک



برای ساختن پل مرکبی که در شکل می بینید، از قرار دادن تیرهای جدار نازک فولادی بر روی پایه هایی از بتون مسلح استفاده شده است. در این فصل می آموزید که چگونه تنشهای برشی در انواع مختلف تیرها را تعیین کنید.

## ۱-۶ مقدمه

در بخش ۱-۵ دیدید که بارگذاری عرضی بر روی یک تیر منجر به تنشهای عمودی و برشی در هر مقطع عرضی از آن تیر می‌شود. تنشهای عمودی در اثر کوپل خمشی  $M$  و تنشهای برشی در اثر نیروی برشی  $V$  در یک مقطع ایجاد می‌شوند. از آنجا که معیار حاکم در طراحی یک تیر براساس استحکام، بیشترین مقدار تنش عمودی در تیر است، تحلیل ما در فصل ۵ محدود به تعیین تنشهای عمودی بود. با این وجود، تنشهای برشی به ویژه در طراحی تیرهای کوتاه می‌توانند مهم باشند، به گونه‌ای که تحلیل آنها، موضوع نخستین قسمت این فصل خواهد بود.



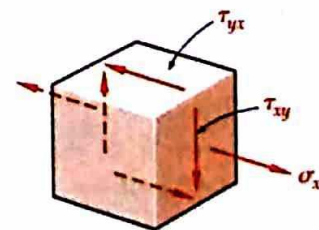
شکل ۱-۶

شکل ۱-۶ به صورت ترسیمی نشان می‌دهد که نیروهای جزیی عمودی و برشی وارد به مقطع عرضی از یک تیر منشوری با صفحه تقارن عمودی، معادل با کوپل خمشی  $M$  و نیروی برشی  $V$  است. با شش معادله می‌توان این حالت را بیان کرد. سه تا از این معادلات شامل تنها نیروهای عمودی  $\sigma_x dA$  است که در بخش ۲-۴ آنها را توضیح دادیم. اینها معادلات (۱-۴)، (۲-۴) و (۳-۴) هستند که می‌گویند مجموع نیروهای عمودی برابر صفر و مجموع گشتاورهای آنها نسبت به محورهای  $y$  و  $z$  به ترتیب برابر با صفر و  $M$  است. سه معادله دیگر که شامل نیروهای برشی  $\tau_{xy} dA$  و  $\tau_{xz} dA$  است را هم اکنون می‌توان نوشت. یکی از این معادلات بیانگر این است که مجموع گشتاورهای نیروهای برشی نسبت به محور  $x$  صفر است و به علت تقارن تیر نسبت به صفحه  $xy$ ، می‌توان از آن به عنوان یک مؤلفه کم‌اهمیت چشم‌پوشی کرد. دو معادله دیگر شامل مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  نیروهای جزیی هستند و عبارتند از:

$$\text{مؤلفه‌های } y: \quad \int \tau_{xy} dA = -V \quad (۱-۶)$$

$$\text{مؤلفه‌های } z: \quad \int \tau_{xz} dA = 0 \quad (۲-۶)$$

نخستین معادله نشان می‌دهد که در یک مقطع عرضی از تیری که تحت بارگذاری عرضی است تنشهای برشی عمودی وجود دارند. دومین معادله بیانگر این است که میانگین تنش برشی افقی در تمام مقاطع برابر صفر است. اما، این بدین معنی نیست که تنش برشی  $\tau_{xz}$  در تمام نقاط برابر صفر است. اینک، یک جزء کوچک مکعبی شکل در صفحه عمودی تقارن تیر را در نظر می‌گیریم، (جایی که می‌دانیم  $\tau_{xz}$  بایستی صفر باشد) و تنشهای وارد بر وجوه این مکعب را بررسی می‌کنیم (شکل ۲-۶). همانگونه که هم اکنون دیدیم، یک تنش عمودی  $\sigma_x$  و تنش برشی  $\tau_{xy}$  به هر یک از دو وجه عمود بر محور  $x$  وارد می‌شوند. اما از فصل ۱ به خاطر دارید هنگامی که تنشهای برشی  $\tau_{xy}$  به وجههای عمودی یک جزء وارد می‌شوند، بایستی تنشهای برابر در وجههای افقی این جزء ایجاد شوند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که تنشهای برشی طولی بایستی در هر عضوی که تحت بارگذاری عرضی است وجود داشته باشد. درستی این مطلب را می‌توان با بررسی یک تیر یکسر درگیر چوبی که از صفحات جداگانه تشکیل شده و در یک سر آن به هم متصل شده‌اند تأیید کرد (شکل ۳-۶ الف). هنگامی که بار عرضی  $P$  به سر آزاد این تیر مرکب وارد می‌شود، می‌بینید که این صفحات نسبت به



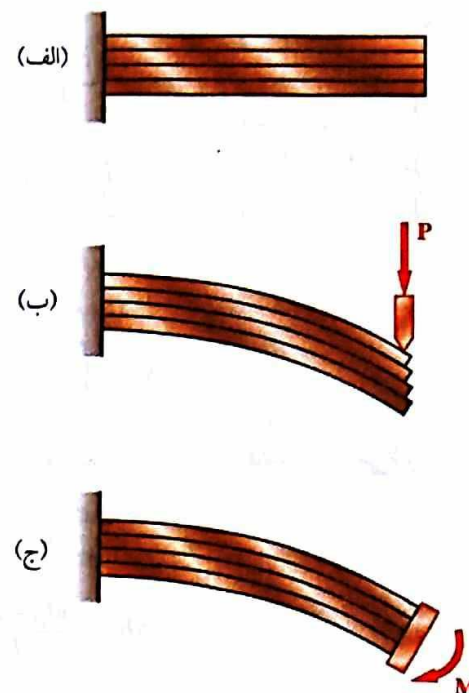
شکل ۲-۶

یکدیگر می لغزند (شکل ۳-۶). در عوض، اگر یک کوپل  $M$  به سر آزاد این تیر مرکب وارد شود (شکل ۳-۶ ج)، مشاهده می کنید که صفحات مختلف به صورت کمانهای هم مرکز از یک دایره خم می شوند و نسبت به یکدیگر نخواهند لغزید. از اینجا برمی آید که نیروهای برشی در تیری که تحت خمش خالص قرار دارد بوجود نمی آید (به بخش ۳-۴ نگاه کنید).

اگر چه در تیری که از یک ماده همگن و یکپارچه مانند فولاد ساخته شده است، عملاً لغزش در اثر بار عرضی  $P$  رخ نمی دهد، اما تمایل به لغزش وجود دارد و به صورت تنش در صفحات طولی افقی بروز می کند. برای تیرهای چوبی که مقاومت آنها در مقابل برش، به علت وجود فضای بین لایه ها، کمتر است، شکست در اثر برش به جای صفحات عرضی معمولاً در امتداد صفحات طولی رخ می دهد (شکل ۴-۶).

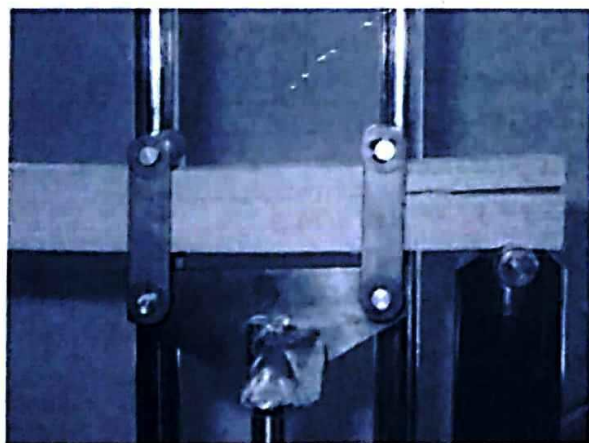
در بخش ۲-۶، جزیی از یک تیر به طول  $\Delta x$  محدود به دو صفحه عرضی و یک صفحه افقی مورد بررسی قرار خواهد گرفت و نیروی برشی  $\Delta H$  وارد به وجه افقی آن، و همچنین نیروی برشی بر طول واحد  $q$  که به جریان برش موسوم است تعیین خواهند شد. در بخش ۳-۶، رابطه ای برای تنش برشی در تیرهای با یک صفحه تقارن عمودی بدست خواهیم آورد و در بخش ۴-۶ از آن برای تعیین تنشهای برشی در انواع معمول تیرها استفاده خواهیم کرد. در بخش ۵-۶ نیز توزیع تنشها در یک تیر چهارگوش باریک بررسی خواهد شد.

رابطه ای که در بخش ۲-۶ بدست می آوریم، در بخش ۶-۶ برای جزیی از یک تیر که محدود به صفحه عرضی و یک سطح منحنی است تعمیم داده می شود. این امر امکان می دهد که در بخش ۷-۶ تنشهای برشی در هر نقطه از یک عضو جدار نازک متقارن مانند بالهای یک تیر بال پهن و قوطی ها را تعیین کرد. اثر تغییر شکلهای پلاستیک بر مقدار و توزیع تنشهای برشی را در بخش ۸-۶ بررسی خواهیم کرد. در بخش پایانی این فصل (بخش ۹-۶)، بارگذاری غیر متقارن بر روی عضوهای جدار نازک را بررسی، و مفهوم مرکز برش\* را بیان خواهیم کرد. و در پایان، خواهید آموخت که چگونه توزیع تنشهای برشی در این اعضا را تعیین کنید.



شکل ۳-۶

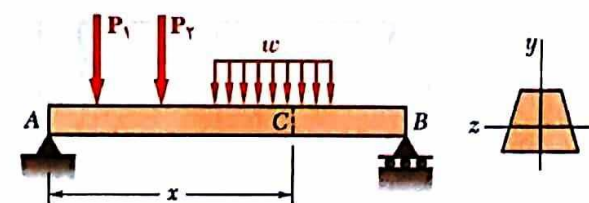
\* shear center



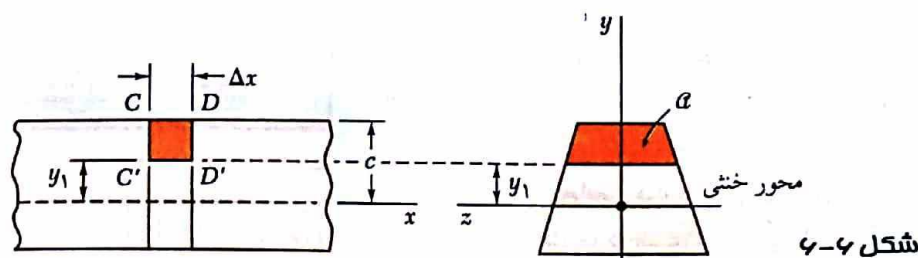
شکل ۴-۶

## ۲-۶ نیروی برشی وارد بر وجه افقی جزیی از یک تیر

تیر منشوری  $AB$  با یک صفحه تقارن عمودی که چندین بار متمرکز و گسترده به آن وارد می شود را در نظر بگیرید (شکل ۵-۶). در فاصله  $x$  از سر  $A$ ، جزء  $CDD'C'$  به طول  $\Delta x$  را از تیر جدا می کنیم. همانگونه که در شکل ۶-۶ می بینید، پهنای این جزء برابر با پهنای تیر و ارتفاع آن از سطح بالایی تیر تا فاصله  $y_1$  از محور خنثی تیر است. نیروهای وارد به این جزء عبارتند از: نیروهای برشی عمودی  $V_C'$  و  $V_D'$ ، یک نیروی برشی افقی  $\Delta H$  که به وجه پایینی جزء وارد می شود، نیروهای عمودی



شکل ۵-۶



شکل ۶-۴

$\sigma_C dA$  و  $\sigma_D dA$ ، احتمالاً یک بار  $w \Delta x$  (شکل ۶-۷). معادلات تعادل را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0: \quad \Delta H + \int_A (\sigma_D - \sigma_C) dA = 0$$

که انتگرالگیری بر روی سطح سایه خورده که در بالای خط  $y = y_1$  قرار دارد انجام می‌شود. با حل این معادله برای  $\Delta H$  و استفاده از معادله (۵-۲) از بخش ۵-۱،  $\sigma = My/I$ ، برای بیان تنشهای عمودی بر حسب گشتاورهای خمشی در نقاط  $C$  و  $D$ ، چنین می‌توان نوشت:

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_A y dA \quad (۳-۶)$$

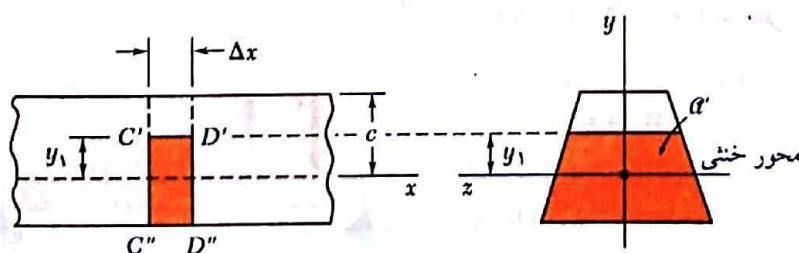
انتگرال موجود در معادله (۳-۶) همان گشتاور اول\* نسبت به محور خنثی بخش  $\alpha$  از سطح مقطع تیر است که در بالای خط  $y = y_1$  قرار دارد. این انتگرال را با  $Q$  نمایش می‌دهیم. از طرف دیگر، با توجه به معادله (۵-۷) از بخش ۵-۵، نمودار خمشی  $M_D - M_C$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$M_D - M_C = \Delta M = (dM/dx) \Delta x = V \Delta x$$

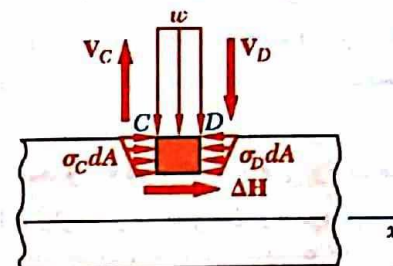
با جایگذاری این عبارت در معادله (۳-۶)، رابطه زیر را برای نیروی برشی افقی وارد به این جزء تیر بدست می‌آوریم:

$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x \quad (۴-۶)$$

نتیجه مشابهی را می‌توان از بررسی نمودار آزاد جزء زیرین  $C'D'D''C''$  نیز بدست آورد (شکل ۸-۶)، چرا که نیروهای برشی  $\Delta H$  و  $\Delta H'$  که توسط دو جزء به یکدیگر وارد می‌شوند برابر و مخالف یکدیگرند. از اینجا برمی‌آید که گشتاور اول  $Q$  برای بخش  $\alpha'$  از سطح مقطع مورد نظر که در زیر خط  $y = y_1$  قرار دارد (شکل ۸-۶)، از نظر مقدار، برابر و از نظر علامت، مخالف با گشتاور اول بخش  $\alpha$  که در بالای این خط قرار دارد می‌باشد (شکل ۶-۶). در حقیقت، مجموع این دو گشتاور، برابر با گشتاور اول کل سطح مقطع نسبت به محور مرکز سطح، و در نتیجه برابر صفر است. گاهی اوقات، از این خاصیت می‌توان برای ساده کردن محاسبه  $Q$  استفاده کرد. همچنین، توجه کنید که  $Q$  برای  $y_1 = 0$  دارای بیشترین مقدار است، چرا که اجزایی از سطح مقطع که در بالای محور خنثی واقعند سهم مثبت در انتگرال (۵-۵) که  $Q$  را تعریف می‌کند دارند، در حالی که، اجزاء واقع در زیر این محور دارای سهم منفی هستند.



شکل ۸-۶



شکل ۶-۷

\*first moment

\* horizontal shear per unit length

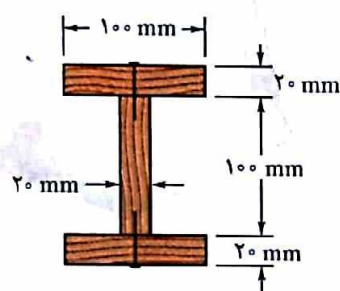
نیروی برشی بر واحد طول\* را که با حرف  $q$  نمایش می‌دهیم، از تقسیم طرفین معادله (۴-۶) بر  $\Delta x$  بدست می‌آوریم:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \quad (۵-۶)$$

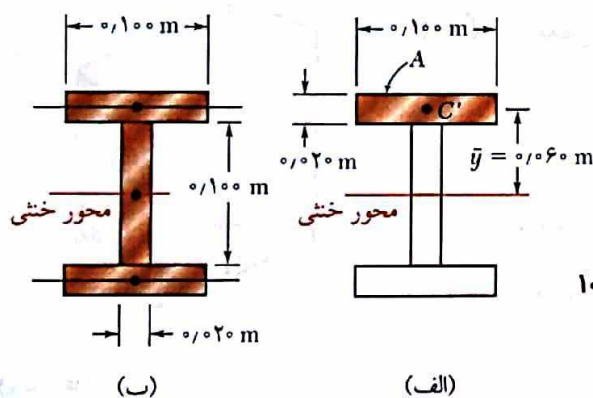
یادآوری می‌کنیم که  $Q$  گشتاور اول سطح نسبت به محور خنثی بخشی از سطح مقطع است که در بالا یا پایین نقطه‌ای که  $q$  در آن محاسبه می‌شود قرار دارد، و  $I$  گشتاور اینرسی کل سطح مقطع نسبت به مرکز سطح آن است. بنابه دلیلی که بعداً در بخش ۷-۶ بیان خواهیم کرد، نیروی برشی افقی بر واحد طول  $q$  نیز جریان برش\* نامیده می‌شود.

\* shear flow

## مثال ۱-۶



شکل ۹-۶



شکل ۱۰-۶

تیری متشکل از سه قطعه چوبی با سطح مقطع  $20 \times 100 \text{ mm}$  توسط میخ به یکدیگر متصل شده‌اند (شکل ۹-۶). چنانچه فاصله بین میخها  $25 \text{ mm}$  و نیروی برشی عمودی در تیر  $V = 500 \text{ N}$  باشد، نیروی برشی وارد بر هر میخ را محاسبه کنید.

نخست، نیروی افقی بر واحد طول  $q$  وارد بر وجه پایینی قطعه بالایی را تعیین می‌کنیم. برای این منظور از معادله (۵-۶) استفاده می‌کنیم. در این معادله،  $Q$  گشتاور اول سطح نسبت به محور خنثی سطح سایه خورده  $A$  در شکل ۱۰-۶ الف، و  $I$  گشتاور اینرسی نسبت به محور خنثی کل سطح مقطع است (شکل ۱۰-۶ ب). با توجه به اینکه گشتاور اول یک سطح نسبت به یک محور مشخص برابر با حاصلضرب سطح در فاصله از مرکز آن سطح تا محور مورد نظر است<sup>۱</sup>، می‌توان چنین نوشت:

$$Q = A\bar{y} = (0.020 \text{ m} \times 0.100 \text{ m})(0.060 \text{ m}) = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (0.020 \text{ m})(0.100 \text{ m})^3 + 2 \left[ \frac{1}{12} (0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.020 \text{ m} \times 0.100 \text{ m})(0.060 \text{ m})^2 \right]$$

$$= 1.667 \times 10^{-6} + 2(0.00667 + 7.2) \times 10^{-6}$$

$$= 16.20 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

با جایگذاری این مقدار در معادله (۵-۶)، چنین خواهیم داشت:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500 \text{ N})(120 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}{16.20 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3704 \text{ N/m}$$

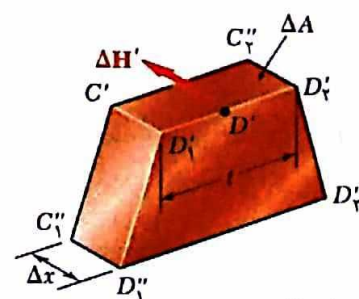
از آنجا که فاصله بین میخها  $25 \text{ mm}$  است، نیروی برشی وارد بر هر میخ برابر است با:

$$F = (0.025 \text{ m}) q = (0.025 \text{ m})(3704 \text{ N/m}) = 92.6 \text{ N}$$

## ۳-۶ تعیین تنشهای برشی در یک تیر

دوباره، تیری بایک صفحه تقارن عمودی که چندین بار متمرکز یا گسترده به این صفحه وارد می‌شوند را در نظر بگیرید. در بخش قبل دیدیم که اگر با دو برش عمودی و یک برش افقی، جزیی از این تیر به طول  $\Delta x$  را از آن جدا کنیم (شکل ۱۱-۶)، مقدار  $\Delta H$  نیروی برشی وارد به وجه افقی این عضو را می‌توان از معادله (۴-۶) بدست آورد. تنش برشی میانگین  $\tau_{ave}$  وارد به این وجه از تقسیم  $\Delta H$  بر سطح آن  $\Delta A$  بدست می‌آید. با توجه به اینکه  $\Delta A = t \Delta x$ ، که  $t$  پهنای این جزء در مقطع برش است،

۱- به پیوست «الف» مراجعه کنید.



شکل ۱۱-۶

می توان چنین نوشت:

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} \frac{\Delta x}{t \Delta x}$$

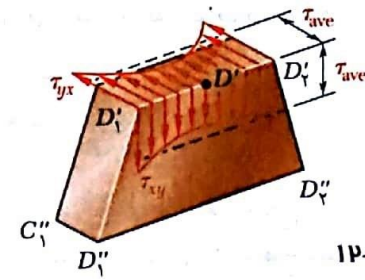
یا

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

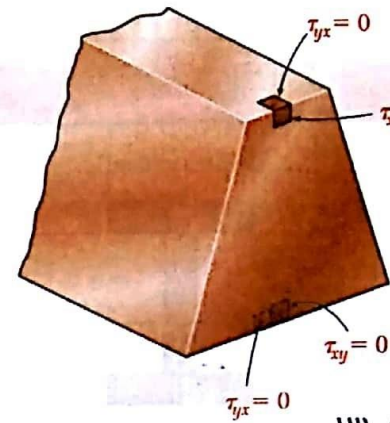
(۶-۶)

از آنجا که تنشهای برشی  $\tau_{yx}$  و  $\tau_{xy}$  وارد بر صفحات عرضی و افقی که از  $D'$  می گذرند با یکدیگر برابرند، این عبارت بدست آمده نیز بیانگر مقدار میانگین  $\tau_{xy}$  در امتداد خط  $D'D'$  است (شکل ۶-۱۲). می بینید که بر روی وجوه بالایی و پایینی تیر  $\tau_{xy} = 0$  است، چرا که هیچ نیرویی بر این وجوه وارد نمی شود. از اینجا بر می آید که در امتداد لبه های بالایی و پایینی مقطع عرضی  $\tau_{xy} = 0$  است (شکل ۶-۱۳). هنگامی که  $Q$  برای  $y = 0$  دارای بیشترین مقدار است (به بخش ۶-۲ نگاه کنید)، نمی توان نتیجه گرفت که  $\tau_{ave}$  در امتداد محور خنثی نیز دارای مقدار ماکزیمم است، چرا که  $\tau_{ave}$  علاوه بر  $Q$  به پهنای مقطع نیز بستگی دارد.

مادامی که پهنای تیر در مقایسه با ارتفاع آن کوچک باشد، تغییرات تنش برشی در امتداد خط  $D'D'$  بسیار اندک خواهد بود (شکل ۶-۱۲) و معادله (۶-۶) را می توان برای محاسبه  $\tau_{xy}$  در هر نقطه از خط  $D'D'$  بکار برد. در حقیقت، در نقاط  $D'$  و  $D'$  بزرگتر از  $D'$  است، اما تئوری الاستیسیته<sup>۲</sup> نشان می دهد که برای تیری با سطح مقطع چهارگوش با پهنای  $b$  و ارتفاع  $h$ ، مادامی که  $b \leq \frac{1}{4}h$  است، مقدار تنش برشی در نقاط  $C_1$  و  $C_2$  (شکل ۶-۱۴) از  $0.8\%$  مقدار میانگین تنش محاسبه شده در امتداد محور خنثی بیشتر نمی شود<sup>۳</sup>.



شکل ۶-۱۲



شکل ۶-۱۳

## ۶-۴ تنشهای برشی $\tau_{xy}$ در تیرها

در بخش قبل دیدیم که برای یک تیر چهارگوش باریک، یعنی تیری با مقطع چهارگوش با پهنای  $b$  و ارتفاع  $h$  که  $b \leq \frac{1}{4}h$  است، تغییرات تنش برشی  $\tau_{xy}$  در امتداد پهنای تیر کمتر از  $0.8\%$  می باشد. بنابراین، برای کاربردهای عملی می توان از معادله (۶-۶) برای تعیین تنش برشی در هر نقطه از سطح مقطع یک تیر باریک استفاده کرد و چنین نوشت:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \quad (۷-۶)$$

که  $t$  برابر با پهنای تیر  $b$ ، و  $Q$  گشتاور اول سطح نسبت به محور خنثی سطح سایه خورده  $A$  است (شکل ۶-۱۵). با توجه به اینکه فاصله از محور خنثی تا مرکز سطح  $C'$  برابر  $\bar{y} = \frac{1}{3}(c + y)$  است، و با یادآوری رابطه  $Q = A\bar{y}$ ، می توان چنین نوشت:

$$Q = A\bar{y} = b(c - y) \frac{1}{3}(c + y) = \frac{1}{3}b(c^2 - y^2) \quad (۸-۶)$$

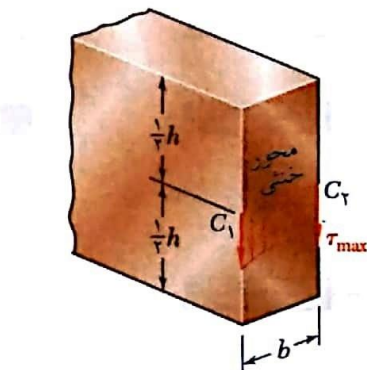
از طرف دیگر، با توجه به اینکه  $I = bh^3/12 = \frac{1}{3}bc^3$  است، چنین خواهیم داشت:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V$$

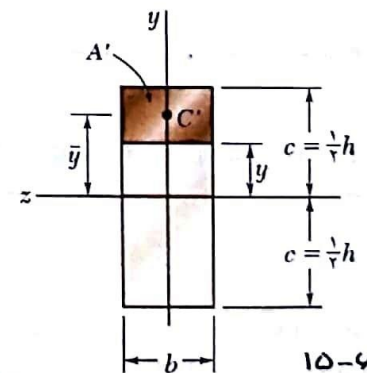
۲- به مرجع زیر نگاه کنید:

S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 3d ed., 1970.

۳- از طرف دیگر، همانگونه که از جدول زیر نیز پیداست، برای مقادیر بزرگ  $b/h$ ، مقدار  $\tau_{max}$  در نقاط  $C_1$  و  $C_2$  ممکن است بسیار بیشتر از مقدار میانگین  $\tau_{ave}$  محاسبه شده در امتداد محور خنثی باشد.



شکل ۶-۱۴



شکل ۶-۱۵

| $b/h$                   | ۰.۲۵  | ۰.۵   | ۱     | ۲     | ۴     | ۶     | ۱۰    | ۲۰    | ۵۰    |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\tau_{max}/\tau_{ave}$ | ۱.۰۰۸ | ۱.۰۳۳ | ۱.۱۲۶ | ۱.۳۹۶ | ۱.۹۸۸ | ۲.۵۸۲ | ۳.۷۷۰ | ۶.۷۴۰ | ۱۵.۶۵ |
| $\tau_{min}/\tau_{ave}$ | ۰.۹۹۶ | ۰.۹۸۳ | ۰.۹۴۰ | ۰.۸۵۶ | ۰.۸۰۵ | ۰.۸۰۰ | ۰.۸۰۰ | ۰.۸۰۰ | ۰.۸۰۰ |

یا از آنجا که سطح مقطع تیر  $A = 2bc$  است،

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \quad (9-6)$$

معادله (۹-۶) نشان می‌دهد که توزیع تنشهای برشی در مقطع عرضی یک تیر چهارگوش به شکل سهمی است (شکل ۹-۶). همانگونه که در بخش قبل دیدید، تنشهای برشی در بالا و پایین سطح مقطع (جایی که  $y = \pm c$ ) برابر صفر است. با قرار دادن  $y = 0$  در معادله (۹-۶)، مقدار بیشترین تنش برشی در یک مقطع مشخص از یک تیر چهارگوش باریک را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

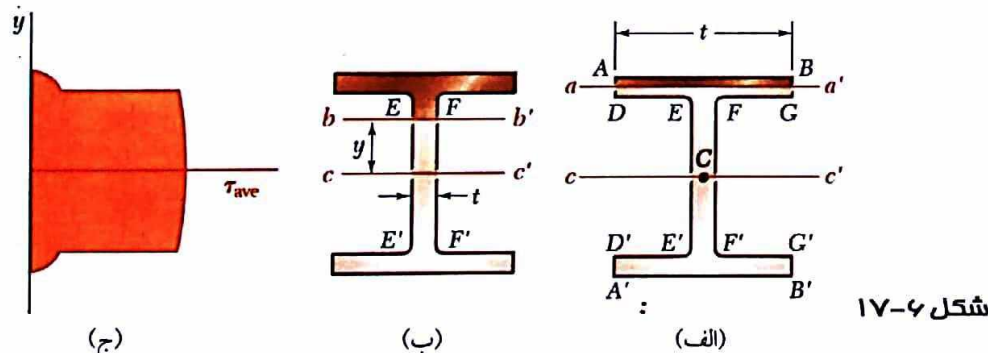
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (10-6)$$

رابطه بدست آمده نشان می‌دهد که بیشترین مقدار تنش برشی در تیری با سطح مقطع چهارگوش ۵۰٪ بیشتر از مقدار  $V/A$  است که از فرض نادرست یکنواخت بودن توزیع تنش در کل سطح مقطع بدست می‌آید.

برای تیرهای استاندارد امریکایی (تیرهای S) یا تیرهای بال‌پهن (تیرهای W)\*، معادله (۹-۶) را می‌توان برای تعیین مقدار میانگین تنش برشی  $\tau_{xy}$  در مقطع  $aa'$  یا  $bb'$  از مقطع عرضی تیر بکار برد (شکلهای ۱۷-۶ الف و ب). که از آنجا:

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{VQ}{It} \quad (6-6)$$

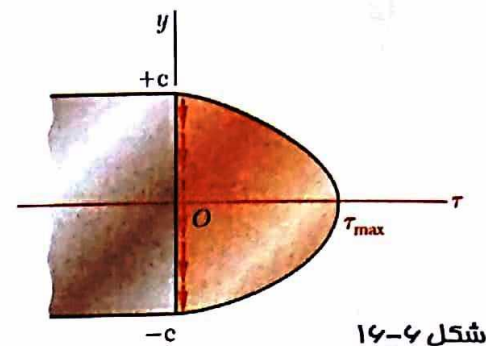
که  $V$  نیروی برشی عمودی،  $t$  پهنای مقطع مورد نظر،  $Q$  گشتاور اول سطح سایه‌خورده نسبت به محور خنثی  $cc'$ ، و  $I$  گشتاور اینرسی کل سطح مقطع نسبت به محور  $cc'$  است. با رسم  $\tau_{\text{ave}}$  برحسب فاصله عمودی  $y$ ، منحنی شکل ۱۷-۶ ج را بدست می‌آوریم. به ناپیوستگی‌های موجود در این منحنی که بیانگر تفاوت بین مقادیر  $t$  مربوط به بالهای  $ABGD$  و  $A'B'G'D'$  و جان تیر  $EFF'E'$  است توجه کنید.\*



برای جان تیر، تغییرات تنش برشی  $\tau_{xy}$  در امتداد مقطع  $bb'$  بسیار اندک است و تنش برشی در این مقطع را می‌توان برابر با مقدار میانگین آن  $\tau_{\text{ave}}$  در نظر گرفت. اما این فرض برای بالها اصلاً صحیح نیست. برای مثال، با در نظر گرفتن خط افقی  $DEFG$ ، می‌بینید که  $\tau_{xy}$  بین  $E$  و  $D$ ، و بین  $G$  و  $F$  برابر صفر است، چرا که این دو تکه بخشی از سطح آزاد تیر هستند. از طرف دیگر، مقدار  $\tau_{xy}$  بین  $E$  و  $F$  را می‌توان با قرار دادن  $t = EF$  در معادله (۶-۶) بدست آورد. در عمل، معمولاً فرض می‌کنند که تمام بار برشی توسط جان تیر تحمل می‌شود؛ از این رو، با یک تقریب خوب می‌توان بیشترین مقدار تنش برشی در این مقطع را از تقسیم  $V$  به مساحت جان تیر بدست آورد.

$$\tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{web}}} \quad (11-6)$$

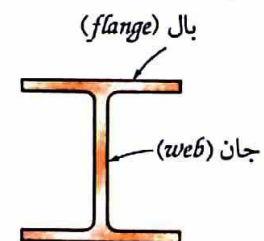
با این حال، بایستی خاطرنشان کنیم که گرچه از مؤلفه عمودی تنش برشی  $\tau_{xy}$  در بالها می‌توان چشم‌پوشی کرد، اما مؤلفه افقی  $\tau_{xz}$  دارای مقدار قابل توجهی است که در بخش ۷-۶ آن را تعیین خواهیم کرد.



\*American standard beam (S-beam)

\*\*wide-flange beam (W-beam)

توضیح:



## مثال ۲-۶

چنانچه تنش برشی مجاز برای تیر چوبی مسئله نمونه ۷-۵ برابر  $\tau_{all} = 0.250 \text{ ksi}$  باشد، بررسی کنید که آیا طرح بدست آمده در این مسئله از دیدگاه تنشهای برشی قابل قبول است یا نه؟

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3 (4.50 \text{ kips})}{2 (3.5 \text{ in})(14.55 \text{ in})} = 0.1325 \text{ ksi}$$

چون  $\tau_{max} < \tau_{all}$ ، طرح بدست آمده در مسئله نمونه ۷-۵ قابل قبول است.

از نمودار نیروی برشی مسئله نمونه ۷-۵ به خاطر دارید که  $V_{max} = 4.50 \text{ kips}$  است. پهنای واقعی تیر  $b = 3.5 \text{ in}$  و مقدار بدست آمده برای ارتفاع آن

## مثال ۳-۶

جان تیر  $W360 \times 32.9$  را به ترتیب برابر  $d = 349 \text{ mm}$  و  $t_w = 5.8 \text{ mm}$  پیدا می‌کنیم. بنابراین:

$$A_{web} = d t_w = (349 \text{ mm})(5.8 \text{ mm}) = 2024 \text{ mm}^2$$

با جایگذاری مقادیر  $|V|_{max}$  و  $A_{web}$  در معادله (۱۱-۶)، داریم:

$$\tau_{max} = \frac{|V|_{max}}{A_{web}} = \frac{58 \text{ kN}}{2024 \text{ mm}^2} = 28.7 \text{ MPa}$$

چون  $\tau_{max} < \tau_{all}$ ، طرح بدست آمده در مسئله نمونه ۸-۵ قابل قبول است.

چنانچه تنش برشی مجاز برای تیر فولادی مسئله نمونه ۸-۵ برابر  $\tau_{all} = 90 \text{ MPa}$  باشد، بررسی کنید که آیا تیر بدست آمده  $W360 \times 32.9$  از دیدگاه تنشهای برشی قابل قبول است یا نه؟

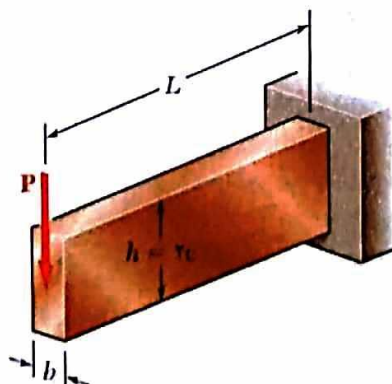
از نمودار نیروی برشی مسئله نمونه ۸-۵ به یاد دارید که بیشترین مقدار مطلق نیروی برشی در این تیر برابر  $|V|_{max} = 58 \text{ kN}$  است. همانگونه که در بخش ۴-۶ دیدید، در عمل می‌توان فرض کرد که تمام بار برشی توسط جان تیر تحمل می‌شود و بنابراین، بیشترین مقدار تنش برشی در تیر را می‌توان از معادله (۱۱-۶) بدست آورد. از پیوست «ج» ارتفاع و ضخامت

## ۵-۶\* بحث بیشتر پیرامون توزیع تنشها در یک تیر چهارگوش باریک

یک تیر یکسر درگیر با سطح مقطع چهارگوش به پهنای  $b$  و ارتفاع  $h$  که بار  $P$  به سر آزاد آن وارد می‌شود را در نظر بگیرید (شکل ۱۸-۶). از آنجا که نیروی برشی  $V$  در تیر ثابت و از نظر مقدار برابر با  $P$  است، معادله (۹-۶) چنین می‌دهد:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{A} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \quad (12-6)$$

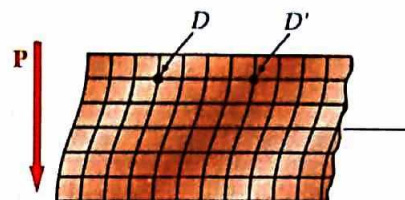
از معادله بالا درمی‌یابیم که تنشهای برشی تنها بستگی به فاصله  $y$  از سطح خنثی دارند؛ و بنابراین، مستقل از فاصله تا نقطه اثر بار هستند. از اینجا برمی‌آید که تمام اجزایی که در فاصله مشابه از سطح خنثی واقعند تحت تغییر شکل یکسانی قرار دارند (شکل ۱۹-۶). اگرچه مقاطع مسطح پس از اعمال نیرو، مسطح باقی نمی‌مانند، اما فاصله بین دو نقطه متناظر  $D$  و  $D'$  واقع بر مقاطع مختلف، بدون تغییر باقی می‌ماند. این بدین معنی است که تنشهای برشی هیچگونه تأثیری بر کرنشهای عمودی  $\epsilon_x$ ، و بنابراین تنشهای عمودی  $\sigma_x$  ندارند، و فرضیاتی که در بخش ۱-۵ بکار بردیم، برای شرایط بارگذاری شکل ۱۸-۶ نیز صادق است.



شکل ۱۸-۶

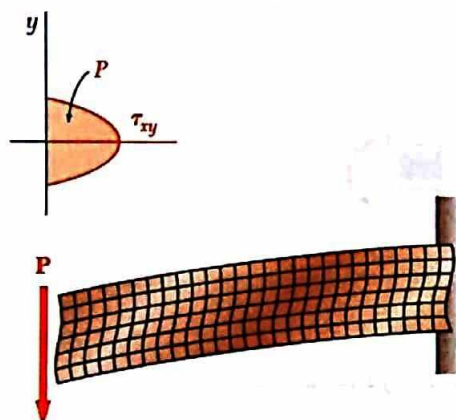
از اینجا نتیجه می‌گیریم که تحلیل ما پیرامون تنشهای ایجاد شده در یک تیر یکسر درگیر با سطح مقطع چهارگوش که بار متمرکز  $P$  به سر آزاد آن وارد می‌شود، معتبر است. مقادیر صحیح تنشهای برشی در این تیر از معادله (۱۲-۶) بدست می‌آید. و تنشهای عمودی در فاصله  $x$  از سر آزاد تیر را با قرار دادن مقدار  $M = -Px$  در معادله (۲-۵) می‌توان بدست آورد:

$$\sigma_x = + \frac{Pxy}{I} \quad (۱۳-۶)$$



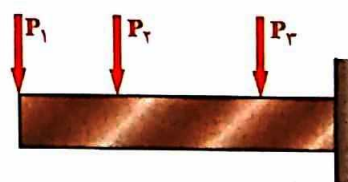
شکل ۱۹-۶

با این حال، ارزش عبارت بالا بستگی به شرایط انتهایی تیر دارد. اگر بخواهیم معادله (۱۲-۶) را در تمام مقاطع تیر بکار ببریم، در این صورت بار  $P$  در مقطع انتهایی تیر بایستی دارای توزیع سهمی شکل باشد. علاوه بر این، تکیه گاه سر ثابت آن بایستی به گونه‌ای باشد که امکان تغییر شکل برشی که در شکل ۱۹-۶ به آن اشاره کردیم را فراهم کند. در عمل، دستیابی به چنین مدلی (شکل ۲۰-۶) بسیار بعید است. اما از اصل «سنت و نانت» چنین برمی‌آید که برای حالت‌های دیگر اعمال بار و انواع دیگر تکیه‌گاه‌های ثابت، معادلات (۱۲-۶) و (۱۳-۶) کماکان توزیع تنشهای نسبتاً صحیحی را به جز در نزدیکی یکی از دو سر تیر می‌توانند بدست دهند.



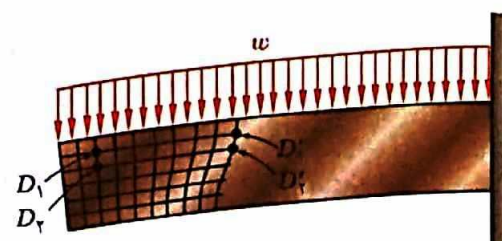
شکل ۲۰-۶

هنگامی که چندین بار متمرکز به تیری با سطح مقطع چهارگوش وارد می‌شود (شکل ۲۱-۶)، اصل «بر هم نهی» را می‌توان برای تعیین تنشهای عمودی و برشی در مقاطعی که بین نقاط اعمال بار قرار دارند بکار برد. اما از آنجا که بارهای  $P_1$ ،  $P_2$ ، ...، به سطح تیر وارد می‌شوند و نمی‌توان توزیع آنها در مقطع تیر را به صورت سهمی فرض کرد، در نزدیکی نقاط اعمال بارها، نتایج بدست آمده اعتبار خود را از دست می‌دهند.



شکل ۲۱-۶

هنگامی که یک بار گسترده به تیر وارد می‌شود (شکل ۲۲-۶)، نیروی برشی با فاصله از انتهای تیر تغییر می‌کند؛ بنابراین، تنش برشی در ارتفاع مشخصی از سطح مقطع تیر  $y$  نیز با فاصله از انتهای تیر تغییر خواهد کرد. تغییر شکل‌های برشی حاصل نیز به گونه‌ایست که فاصله بین دو نقطه متناظر از مقاطع مختلف مانند  $D_1$  و  $D'_1$  یا  $D_2$  و  $D'_2$ ، بستگی به ارتفاعشان خواهد داشت. این بدین معنی است که فرض مسطح ماندن مقطع‌ها که معادلات (۱۲-۶) و (۱۳-۶) براساس آن بدست آمدند، برای شرایط بارگذاری شکل ۲۲-۶ دیگر معتبر نیست. با این وجود، خطای حاصل برای مقادیر نسبت دهانه به ارتفاع  $L/h$  برای تیرهایی که در عمل با آنها سروکار داریم بسیار اندک است.

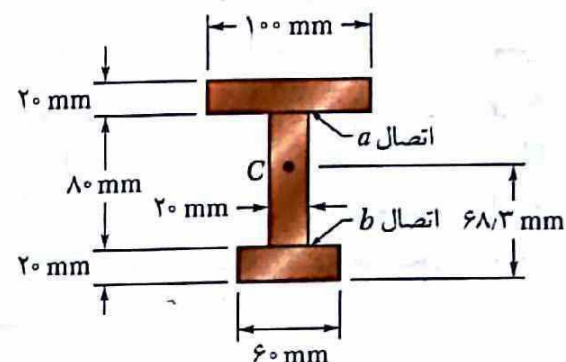
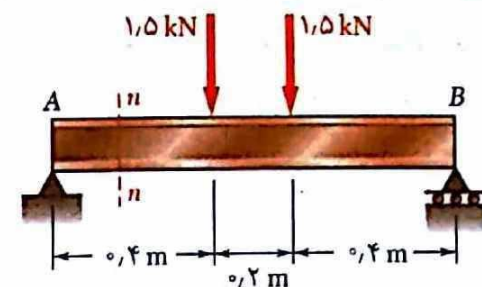


شکل ۲۲-۶

توجه داشته باشید که در بخشهایی از تیر که تحت بارهای متمرکز یا گسترده است، علاوه بر تنشهای  $\tau_{xy}$  که در شکل ۲-۶ دیدید، تنشهای عمودی  $\sigma_y$  نیز به وجه‌های افقی اجزاء مکعبی شکل ماده وارد می‌شوند.

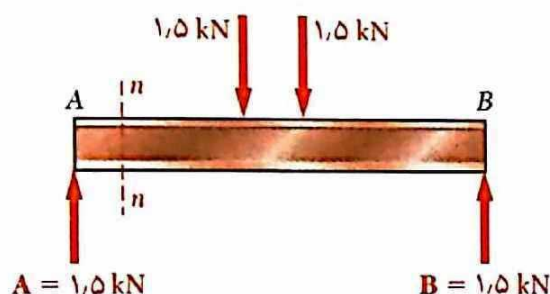
## مسئله نمونه ۶-۱

تیر  $AB$  از سه تخته چوبی که توسط چسب به یکدیگر متصل شده‌اند ساخته شده است. بارهایی که در شکل می‌بینید به صفحه تقارن این تیر وارد می‌شوند. چنانچه پهنای هر یک از اتصالات چسبی  $20 \text{ mm}$  باشد، تنش برشی میانگین در هر یک از اتصالات در مقطع  $n-n$  از تیر را تعیین کنید. مختصات مرکز سطح مقطع در شکل داده شده است و گشتاور اینرسی نسبت به مرکز سطح مقطع تیر  $I = 8,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$  می‌باشد.



**حل:**

**نیروی برشی عمودی در مقطع  $n-n$ .** از آنجا که تیر و بار وارد به آن، هر دو نسبت به مرکز تیر متقارن هستند، چنین داریم:  $A = B = 1,5 \text{ kN} \uparrow$



با رسم نمودار آزاد بخشی از تیر که در سمت چپ مقطع  $n-n$  قرار دارد، چنین می‌توان نوشت:

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad 1,5 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 1,5 \text{ kN}$$

**تنش برشی در سطح اتصال  $a$ .** با عبور مقطع  $a-a$  از سطح اتصال چسبی، سطح مقطع تیر را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. با انتخاب سطح بالای مقطع  $a-a$ ، گشتاور اول این سطح  $Q$  نسبت به محور خشی را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = A \bar{y}_1 = [(0,100 \text{ m})(0,020 \text{ m}^2)](0,0417 \text{ m}) = 83,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

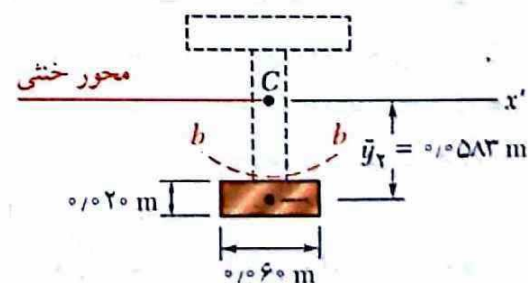
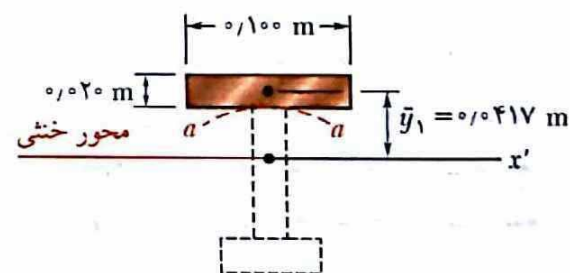
با توجه به اینکه پهنای اتصال چسبی  $t = 0,020 \text{ m}$  است، معادله (۷-۶) را برای تعیین تنش برشی میانگین در این اتصال بکار می‌بریم:

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(83,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,020 \text{ m})} \quad \tau_{ave} = 725 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$

**تنش برشی در سطح اتصال  $b$ .** اینک، با عبور مقطع  $b-b$ ، مقدار  $Q$  را با استفاده از سطح زیر این مقطع محاسبه می‌کنیم:

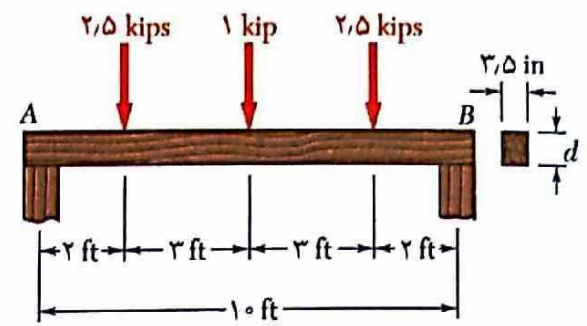
$$Q = A \bar{y}_2 = [(0,060 \text{ m})(0,020 \text{ m}^2)](0,0583 \text{ m}) = 70,0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(70,0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,020 \text{ m})} \quad \tau_{ave} = 608 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$



## مسئله نمونه ۶-۲

سه بار متمرکز به تیر چوبی AB با دهانه ۱۰ ft و پهنای اسمی ۴ in (اندازه واقعی ۳٫۵ in است) وارد می‌شود. چنانچه برای چوب بکار رفته در این تیر  $\sigma_{all} = 1800 \text{ psi}$  و  $\tau_{all} = 120 \text{ psi}$  باشد، کمترین ارتفاع مورد نیاز  $d$  را بدست آورید.



**حل:**

**بیشترین نیروی برشی و گشتاور خمشی.** پس از رسم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی، بیشترین مقادیر به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$M_{max} = 1.5 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 90 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

$$V_{max} = 3 \text{ kips}$$

**طراحی براساس تنش عمودی مجاز.** نخست، مدول مقطع الاستیک  $S$  را برحسب ارتفاع  $d$  بیان می‌کنیم:

$$I = \frac{1}{12} b d^3 \quad S = \frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{d}{2}} b d^2 = \frac{1}{6} (3.5) d^2 = 0.5833 d^2$$

برای  $M_{max} = 90 \text{ kip} \cdot \text{in}$  و  $\sigma_{all} = 1800 \text{ psi}$ ، چنین خواهیم داشت:

$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} \quad 0.5833 d^2 = \frac{90 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in}}{1800 \text{ psi}}$$

$$d^2 = 85.7 \quad d = 9.26 \text{ in}$$

شرط  $\sigma_m \leq 1800 \text{ psi}$  برقرار است.

**بررسی میزان تنش برشی:** برای  $V_{max} = 3 \text{ kips}$  و  $d = 9.26 \text{ in}$ ، چنین داریم:

$$\tau_m = \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{A} = \frac{3}{2} \frac{3000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in})(9.26 \text{ in})} \quad \tau_m = 138.8 \text{ psi}$$

از آنجا که  $\tau_{all} = 120 \text{ psi}$  است، ارتفاع  $d = 9.26 \text{ in}$ ، قابل قبول نیست و تیر را بایستی مجدداً براساس شرط  $\tau_m \leq 120 \text{ psi}$  طراحی کرد.

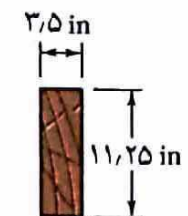
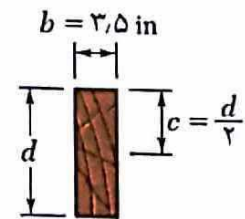
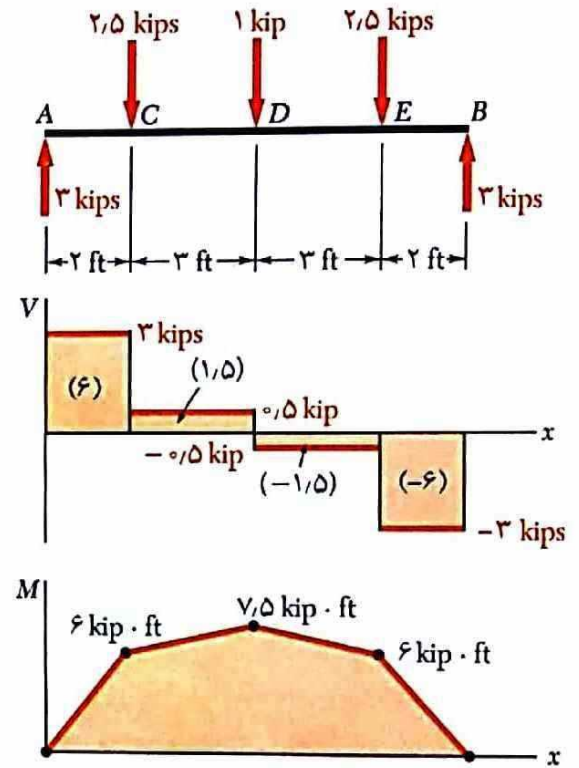
**طراحی براساس تنش برشی مجاز.** از آنجا که تنش برشی مجاز عامل تعیین کننده طراحی است، چنین می‌توان نوشت:

$$\tau_m = \tau_{all} = \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{A} \quad 120 \text{ psi} = \frac{3}{2} \frac{3000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in})d}$$

$$d = 10.71 \text{ in} \quad \blacktriangleleft$$

همانگونه که می‌دانید، تنش عمودی کمتر از  $\sigma_{all} = 1800 \text{ psi}$  است و ارتفاع  $10.71 \text{ in}$  کاملاً قابل قبول است.

**نکته.** از آنجا که برای تیرهای چوبی، گام تغییرات ارتفاع ۲ in است، بایستی از تیری با اندازه اسمی  $4 \times 12 \text{ in}$  استفاده کرد. بنابراین، سطح مقطع واقعی  $3.5 \times 11.25 \text{ in}$  خواهد بود.



۴ in × ۱۲ in  
اندازه اسمی